Satz 6.2 (Konstruktionslemma)

kanonische Proj auf den Basispkt

Sei X eine n-dim. diffb. Mfk und $r \in \mathbb{N}$.
Sei zu jedem $x \in X$ ein r-dim $\mathbb{R}$-VR E_x gegeben.

$$E := \biguplus_{x \in X} E_x \quad \text{(disjunkte Vereinigung)} \xrightarrow{\pi} X$$

Sei $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X
und zu jedem $\alpha \in A$ gebe es eine bijektive Abb

$$\varphi_\alpha : \biguplus_{x \in \mathcal{U}_\alpha} E_x = \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^r$$

mit $\mathrm{proj}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ und $\varphi_\alpha\big|_{E_x} : E_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$
liefert faserweise einen $\mathbb{R}$-Isom-mus.

Sei zu jedem Paar $(\alpha, \beta) \subset A$ mit $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$
eine diffbare Abb. $\varphi_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \to GL(\mathbb{R}^r)$ gegeben s.d

"Übergangsfkt" $\leftarrow$ $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \varphi_{\alpha\beta}(p) v)$.

Dann ist E ein Vektorbündel.

<u>Beweis:</u> Nachprüfen der Definition 6.1 zeigt, dass wir zeigen müssen, dass E überhaupt eine Mannigfaltigkeit ist, ~~alle anderen Eigenschaften sind nach Vor.~~ und dass φ_α's Diffeos sind.

Topologie auf E: Basis besteht aus

$$\mathcal{B} := \{ \varphi_\alpha^{-1}(V \times W) \mid \alpha \in A,\ V \subset \mathcal{U}_\alpha \text{ offen},\ W \subset \mathbb{R}^r \text{ offen} \}$$

$\ulcorner$ $\mathcal{B}$ ist tatsächlich Basis einer Topologie wegen dem folgenden Satz: $\lrcorner$

Satz: $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Basis einer Top. auf X genau dann wenn $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ und für alle $B, B' \in \mathcal{B}$ und alle $x \in B \cap B'$ ex. $B'' \in \mathcal{B}$ mit $B'' \subseteq B \cap B'$.

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{damit werden } \varphi_\alpha\text{'s Homöom-men}}$!

E ist damit Hausdorffsch: Seien $p, q \in E$, $p \neq q$.

Fall 1: $p, q \in E_x$ liegen in der gleichen Faser, $x \in \mathcal{U}_\alpha$
Da $\mathbb{R}^r$ als $\mathbb{R}$-VR automatisch Hausdorff ist und

$$\varphi_\alpha(p) \neq \varphi_\alpha(q) \in \{x\} \times \mathbb{R}^r$$

existieren offene Umg $W_p, W_q \subset \mathbb{R}^r$ mit $W_p \cap W_q = \emptyset$ und $p \in \varphi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \times W_p)$
$q \in \varphi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \times W_q)$

Beide Basisumg. haben leeren Schnitt.

Fall 2: p, q liegen NICHT in der gleichen Faser dh $\pi(p) \neq \pi(q)$. Da X Mfk und insbes. Hausdorff ist, ex. Umgebungen $V_p, V_q \subset X$ mit $V_p \cap V_q = \emptyset$. Sei $\pi(p) \in \mathcal{U}_\alpha$, $\pi(q) \in \mathcal{U}_\beta$ ($\alpha = \beta$ nicht ausgeschl)
Dann haben die Basisumgebungen

$$\varphi_\alpha^{-1}((\mathcal{U}_\alpha \cap V_p) \times \mathbb{R}^r) \text{ und } \varphi_\beta^{-1}((\mathcal{U}_\beta \cap V_q) \times \mathbb{R}^r)$$

leeren Schnitt.

E erfüllt das 2-te Abzählbarkeitsaxiom:

Da X und $\mathbb{R}^r$ beide das 2-te Abz. Axiom erfüllen, existiert eine abzählbare Teilbasis von $\mathcal{B}$.

Analog ergibt sich dass E lokalkompakt ist.

Bleibt z.zg: es existiert ein Atlas auf E:

Apriori brauchen $\mathcal{U}_\alpha$'s keine Kartenumgebungen zu sein. Sei $\{(\tilde{\mathcal{U}}_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ ein Atlas auf X. Dann ist

$\{(\tilde{\mathcal{U}}_j \cap \mathcal{U}_\alpha \,;\, \varphi_j / \tilde{\mathcal{U}}_j \cap \mathcal{U}_\alpha)\}_{(j,\alpha) \in J \times A}$ ein Atlas auf X.

Zur Vereinfachung der Notation sei OBdA $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ein Atlas auf X.

Dann liefert

$$\hat{\mathcal{U}}_\alpha := \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$$

$$\hat{\varphi}_\alpha : \hat{\mathcal{U}}_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$$

mit $\hat{\varphi}_\alpha := (\varphi_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \phi_\alpha$

einen Atlas auf E.

- die $\hat{\varphi}_\alpha$ sind Homöom, da ϕ_α's Homöos wegen der Wahl der Topologie.
- die Kartenwechsel

$$\hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta^{-1} = (\varphi_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \times \mathrm{id})^{-1}$$

$$= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \,;\, \phi_{\alpha\beta})$$

sind offensichtlich Diffeos, da $\phi_{\alpha\beta}$ Diffeo's

Korollar 6.3 Sei M eine n-dim diffbare Mfk. C^2 Dann ist

$$TM := \dot{\bigcup_{p\in M}} T_pM \xrightarrow{\pi} M$$

ein Vektorbündel (dim $= 2n$) über M.

Beweis: Nach dem Konstruktionslemma, Satz 6.2, brauchen wir nur φ_α und $\varphi_{\alpha\beta}$'s anzugeben. Betrachte Atlas $(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ auf M. Wir definieren $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$\varphi_\alpha([c]) = \left(c(0) ; \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi_\alpha(c(t)) \right)$$

für alle Kurven c mit $c(0) \in \mathcal{U}_\alpha$.

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\left(c(0) ; v = \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi_\beta(c(t)) \right)$$

$$= \left(c(0) ; \underbrace{D(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})}_{C^1\text{-Diffeo.}} [v] \right)$$

Ü

$\boxtimes$

Assoziierte Vektorbündel

Seien E, F – VB vom Rang r_E, r_F :

- $E = \dot{\bigcup_{x\in M}} E_x$; $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$; $\varphi_\alpha : E|_{\mathcal{U}_\alpha} \to \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{r_E}$
  mit Übergangsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta} \in GL(\mathbb{R}^{r_E})$
- $F = \dot{\bigcup_{x\in M}} F_x$; $(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)$; $\psi_\alpha : F|_{\mathcal{U}_\alpha} \to \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{r_F}$
  mit Übergangsfunktionen $\psi_{\alpha\beta} \in GL(\mathbb{R}^{r_F})$

<u>Bemerkung</u>: A priori sind die offenen Überdeckungen aus trivialisierenden Umgebungen für beide VB E und F unterschiedlich. Wir wählen einfach die gemeinsame Verfeinerung $(\mathcal{U}_\alpha)$ beider Überd.

Wir konstruieren nun NEUE VB:

<u>Definition 6.4</u>

a) <u>Tensor-produkt</u> $E \otimes F := \bigsqcup_{x \in M} E_x \otimes F_x$ mit $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha \otimes \psi_\alpha)$

$\to \varphi_\alpha \otimes \psi_\alpha : E \otimes F|_{\mathcal{U}_\alpha} \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times (\mathbb{R}^{r_E} \otimes \mathbb{R}^{r_F})$

$\to (\varphi_\alpha \otimes \psi_\alpha) \circ (\varphi_\beta \otimes \psi_\beta)^{-1}(x, \underset{\underset{v_E \otimes v_F}{\parallel}}{v}) = (x, [\varphi_{\alpha\beta}(x) v_E] \otimes [\psi_{\alpha\beta}(x) v_F])$

Ähnliche Konstruktion für $E \times F$, $E \oplus F$, $Hom(E, F)$, $Sym^2(E, E)$

b) <u>Duales Vektorbündel</u> $E^* := \bigsqcup_{x \in M} E_x^*$ mit $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha^*)$

$\to \varphi_\alpha^* : E|_{\mathcal{U}_\alpha} \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times (\mathbb{R}^{r_E})^*$ Ü

$\to \varphi_\alpha^* \circ \varphi_\beta^{*\,-1}(x, v) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x)^t [v])$

<u>Beispiel</u>: T^*M — "Kotangentialbündel", 2n-dim. Mfk wie in Kor 6.3

Notation: $T_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\rangle$

$T_p^*M = \left\langle dx_1|_p, \dots, dx_n|_p \right\rangle$ duale Basis

mit $dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right) = \delta_{ij}$.

c) <u>Pullback-Bündel</u>: $f: N \to M$ diffbare Abb zwischen Mfk

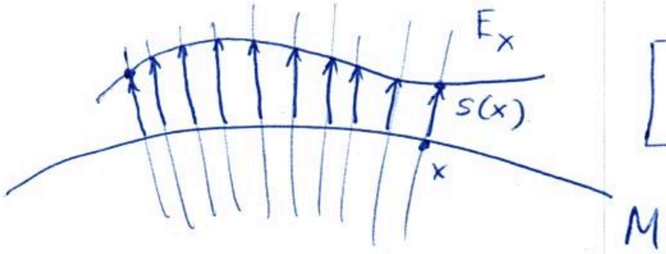
$f^*E := \bigsqcup_{x \in N} E_{f(x)}$ mit $(f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha); f^*\varphi_\alpha)$

Lokale Trivialisierungen $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ von E werden auf f^*E "verpflanzt": $(f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha); f^*\varphi_\alpha)$ mit:

$$f^*\varphi_\alpha : f^*E\Big|_{f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{U}_\alpha} E_{f(x)} \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{r_E}$$

$$(f^*\varphi_\alpha) \circ (f^*\varphi_\beta)^{-1}(x, v) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(f(x))[v])$$

Definition 6.5 Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein C^k-Vektorbündel über einer C^k-Mfk M. Ein C^k-Schnitt von E ist eine C^k-Abb $s: M \longrightarrow E$ so dass $\underbrace{\pi \circ s = id_M}_{\boxed{s(x) \in E_x}}$.



Den Vektorraum aller C^k-Schnitte von E bezeichnet man als $\Gamma^k(M,E)$.

Beispiele 6.6

a) $E = M \times \mathbb{R}^n$. Ein Schnitt $s \in \Gamma^k(M,E)$ ist eine C^k-Abb. mit $s(p) = (p, \tilde{s}(p)) \in M \times \mathbb{R}^n$.

Also kann s mit $\tilde{s}: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ identifiziert werden

$$\text{d.h. } \Gamma^k(M, M \times \mathbb{R}^n) = C^k(M, \mathbb{R}^n)$$

(diese Identifikation geht für nicht-triv. Vektorbündel nur lokal)

b) $C^k(M) \cong \Gamma^k(M, \mathbb{R})$

c) $\Gamma^1(M, TM)$ heißt der Raum "<u>differenzierbarer Vektorfelder</u>" auf M.

<u>Lemma 6.7</u> Ein VB E vom Rang n ist genau dann trivial, dh $E \cong M \times \mathbb{R}^n$, falls Schnitte $X_1, \dots, X_n \in \Gamma^1(M, E)$ existieren, die punktweise eine Basis bilden, dh

$$E_p = \operatorname{span}\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}.$$

Diffeo von VB per Def faserweise VR-Iso

<u>Beweis-Skizze</u>: "$\Rightarrow$" $\phi: M \times \mathbb{R}^n \to E$ Diffeo, insbesondere punktweise VR-Isom-m. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ONB von $\mathbb{R}^n$. Setze

$$X_j(p) := \phi(p, e_j) \rightsquigarrow X_j \in \Gamma^1(M, E)$$

Per Konstr-n $\underbrace{\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}}_{\text{Basis von } E_p}$ da $\underbrace{\phi(p, \cdot): \mathbb{R}^n \to E_p}_{\text{VR-Iso}}$.

"$\Leftarrow$". Setze $\phi: E \to M \times \mathbb{R}^n$

$$\left(p, v = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j(p)\right) \longmapsto \left(p, \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\right)$$

Das liefert einen faserweisen VR-Iso und da die Schnitte X_j alle C^1-sind, ist ϕ ein Diffeo. ☒

Im Allgemeinen ist die Frage nach der Anzahl von linear unabhängigen Schnitten in einem VB schwierig zu beantworten. Wir notieren ohne Beweis:

<u>Satz 6.8</u> (Igelsatz) TS^2 besitzt <u>kein</u> $X \in \Gamma^1(S^2, TS^2)$ mit $X(p) \neq 0$ für alle $p \in S^2$ (kein diffb VFeld ohne Nullstelle)

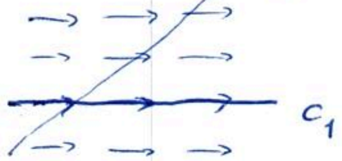
§7. Vektorfelder und Flüsse von Vektorfeldern

<u>Definition 7.1</u> Sei $X \in \Gamma^1(TM) \equiv \Gamma(TM)$.
Dann nennt man eine C^1-Kurve $c : I \to M$
"<u>Integralkurve von X</u>" falls $\dot{c}(t) = X(c(t))$
für alle $t \in I$.

$\dot{c}(t) := [c_t] \in T_{c(t)}M$
mit $c_t(s) = c(t+s)$ für t, s klein genug

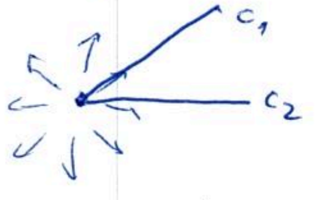
<u>Beispiele 7.2</u> $M = \mathbb{R}^2$

a) $X(x,y) = (1,0)^t$



$c_1(t) := (t, 0)^t$ Integralkurve
$c_2(t) := (t, t)^t$ keine Integralkurve

b) $X(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$(e^t, e^t) = c_1(t) = (\ldots)^t$
$t > 0$
$(e^t, 0) = c_2(t) = (\ldots, 0)^t$ sind beides Integralkurven

c) $X(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$
ist eine Integralkurve.

Folgender Satz besagt, dass eine Kurve genau dann eine Integralkurve ist, wenn sie es in lok. Koordinaten ist.

<u>Satz 7.3</u> Sei $X \in \Gamma(TM)$ und $(\mathcal{U}, \varphi)$ eine lokale Karte.
Sei $c : I \to \mathcal{U} \subset M$ eine diffbare Kurve

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) c ist eine Integralkurve von X

b) für $X|_{\mathcal{U}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ in lokalen Koord,

mit $\lambda_j \in C^1(\mathcal{U})$, ist $(\varphi \circ c)$ eine Integralkurve

von $(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \Gamma(\varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n)$

<u>Beweis:</u> Wir schreiben $c_t(s) := c(t+s)$ für t, s klein genug.

Es gilt:

$$\dot{c}(t) \equiv [c_t] = [\varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_t]$$

$$= D\varphi^{-1}|_{\varphi(c(t))} [\varphi \circ c_t]$$

Wir schreiben $(\varphi \circ c_t)(0)$ in der ONB $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ von $\mathbb{R}^n$ auf

$$(\varphi \circ c_t)(0) =: \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j(t) e_j$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = D\varphi^{-1}|_{\varphi(c(t))} [\varphi \circ c_t]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \dot{\tilde{c}}_j(t) \, D\varphi^{-1}|_{\varphi(c(t))} [e_j]$$

$$\underset{(\mathrm{Def})}{=} \sum_{j=1}^{n} \dot{\tilde{c}}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{c(t)}$$

Also ist $\dot{c}(t) = X(c(t))$ genau dann wenn

d.h. c ist Integralkurve von X

$$\forall_{j=1,\ldots n}: \dot{\tilde{c}}_j(t) = \lambda_j(c(t))$$

d.h. wenn $\varphi \circ c$ Integralkurve von $(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ VF