§5. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

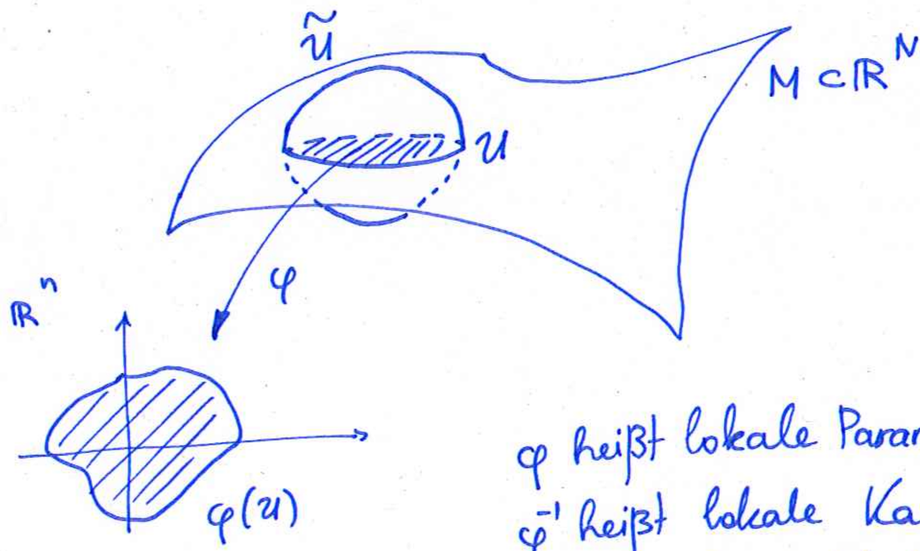
Wir erinnern uns zuerst an Untermfk aus Ana 2,3.

<u>Definition 5.1</u> Eine Teilmenge $M^n \subset \mathbb{R}^N$ heißt n-dim. C^k-Mfk falls für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $p \in \mathcal{U} \subset M$ und ein Homöom. $\varphi: \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ ex. so dass

- $\varphi^{-1}: \varphi(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ k mal stetig diffbar
- $D\varphi^{-1}\big|_q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ Jakobi-Matrix für alle $q \in \varphi(\mathcal{U})$ injektiv ist, dh rang $D\varphi^{-1}\big|_q = n$.

<u>Bemerkungen:</u> a) Homöo φ: φ stetig, bij und φ^{-1} stetig.

b) $\mathcal{U} \subset M$ offen heißt es ex $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^N$ offen so dass $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} \cap M$.



φ heißt lokale Parametrisierung
φ^{-1} heißt lokale Karte.
$\mathcal{U}$ heißt lokale Kartenumgebung.

Es existieren folgende weitere äquivalente Charakterisierungen von Untermfk:

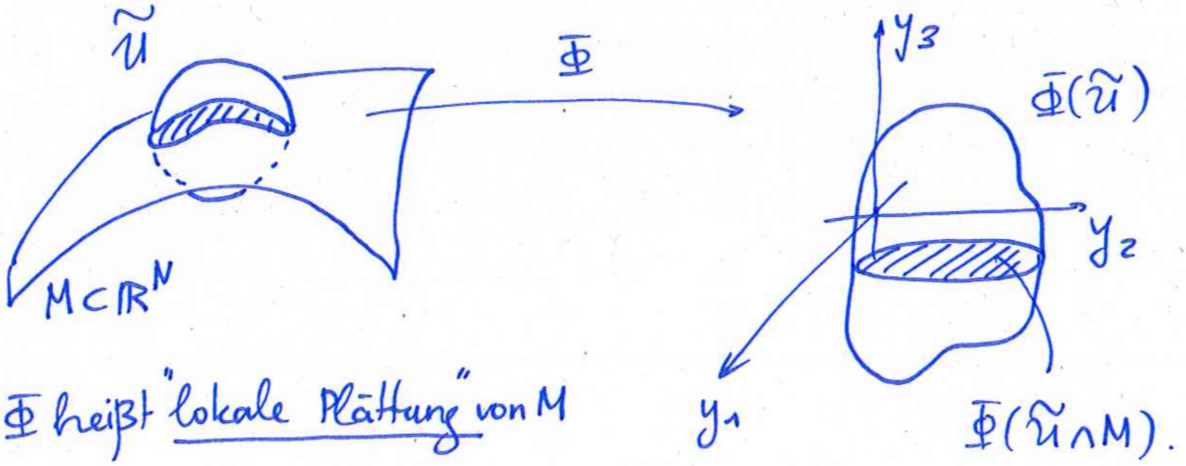
<u>Satz 5.2</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ und $n + k = N$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) M ist eine n-dim. C^r-Untermfk.

b) für alle $p \in M$ ex. offene Umgebung $p \in \tilde{U} \subset \mathbb{R}^N$ und ein C^r-Diffeo $\Phi: \tilde{U} \to \Phi(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^N$ so dass

$$\Phi(\tilde{U} \cap M) = \{ y \in \Phi(\tilde{U}) \mid y_{n+1} = \dots = y_N = 0 \}.$$



Φ heißt "<u>lokale Plättung</u>" von M

c) für alle $p \in M$ ex offene Umgebung $p \in \tilde{U} \subset \mathbb{R}^N$ und eine C^r-Funktion $f: \tilde{U} \to \mathbb{R}^{k = N-n}$ so dass

voller Rang $\to$ • $\operatorname{Rang} Df\big|_q = k$ für alle $q \in M \cap \tilde{U}$

• $M \cap \tilde{U} = f^{-1}(\{0\})$

[d.h. lokal wird M als 0-Niveaumengen einer Funktion $f: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$ dargestellt, also als Lösungsmenge von $f(x) = 0$, $N-n$ Gl.]

d) für alle $p \in M$ ex. offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in V \times W \subset \mathbb{R}^N$; und eine C^r-Funktion $g: V \to W$ so dass evtl nach Permutation der Koord:

$$M \cap (V \times W) = \{ (x, g(x)) \mid x \in V \}$$

d.h. M ist lokal ein Graph von g, mit $x \in V \subset \mathbb{R}^n$ Variablen.

<u>Zusammenfassend:</u> M ist eine Untermfk genau dann wenn

b) M lokal plättbar

c) M lokal Lösungsmenge von Gleichungen

d) M lokal Graph einer Funktion.

(ohne Beweis; siehe Analysis 2,3).

<u>Beispiel 5.3</u> Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

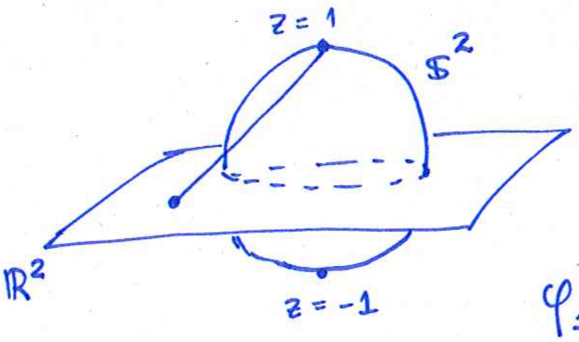
1) $S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \}$.

ist Untermfk nach Satz 5.2 c) mit $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$.

$$Df(x,y,z) = (2x \,;\, 2y \,;\, 2z)$$

hat vollen Rang $= 1$ falls $(x,y,z) \in S^2$.

2) S^2 lässt sich auch durch Karten überdecken:



$$\mathcal{U}_1 = \{ (x,y,z) \in S^2 \mid z \neq 1 \}$$
$$\mathcal{U}_2 = \{ (x,y,z) \in S^2 \mid z \neq -1 \}$$

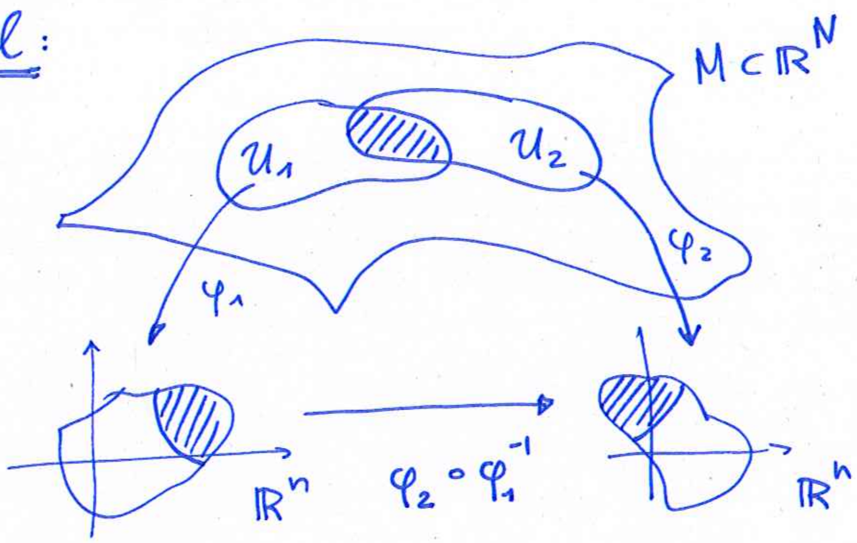
$$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{R}^2 ; \ \varphi_1(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z} , \frac{y}{1-z} \right)$$
$$\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R}^2 , \ \varphi_2(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z} , \frac{y}{1+z} \right)$$

- dies ist eine Überdeckung mit Parametrisierungen.
- Ü: Schreiben Sie eine Überdeckung mit Karten auf.

3) Ü Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}(n) = \{ A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I \}$ eine Untermfk bilden. Was ist hier N?

Grundbegriffe der Analysis auf U'mfk:

Kartenwechsel:



Satz 5.4 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermfk der Klasse C^k mit 2 Parametrisierungen φ_1, φ_2 wie oben.

Zeige: $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$

ist ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis: Sei $p \in U_1 \cap U_2$.

Nach Satz 5.2 b) ex. offene Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^N$ mit $p \in \tilde{U}$, $\tilde{U} \cap M \subset U_1 \cap U_2$, und ein C^k-Diffeo $\Phi : \tilde{U} \to \Phi(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^N$ so dass

$$\Phi(M \cap \tilde{U}) = \underbrace{\{ y \in \Phi(\tilde{U}) \mid y_{n+1} = \dots = y_N = 0 \}}_{= \Phi(\tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}.$$

- $V_j := \varphi_j(M \cap \tilde{U}) \subset \mathbb{R}^n$ offen $(j = 1, 2)$
- $\Phi \circ \varphi_j^{-1} : V_j \to \Phi(\tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

  d.h. $\Phi \circ \varphi_j^{-1} = (\psi_j ; 0)$ mit $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n$
- $D(\Phi \circ \varphi_j^{-1})\big|_x = D\Phi\big|_{\varphi_j^{-1}(x)} \circ D\varphi_j^{-1}\big|_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$

  Rang $D\Phi\big|_{\varphi_j^{-1}(x)} = N$; Rang $D\varphi_j^{-1}\big|_{x \in V_j} = n \Rightarrow$ Rang $D\psi_j = n$.

Erinnerung: "Satz über inverse Funkt."

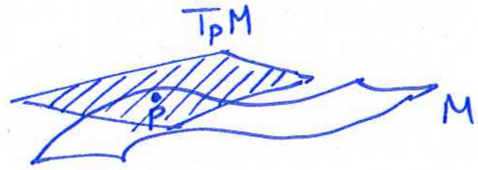
$\psi: V \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, V offen, ψ C^k, $D\psi(x)$ inv-bar für alle $x \in V$. Dann ist ψ ein C^k-Diffeo.

$$\Rightarrow \psi_1, \psi_2 \text{ sind } C^k\text{-Diffeos.}$$

Nun gilt: $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = (\Phi \circ \varphi_2^{-1})^{-1} \circ (\Phi \circ \varphi_1^{-1})$

$$= \psi_2^{-1} \circ \psi_1 \text{ ist ebenfalls } C^k\text{-Diffeo.} \quad \boxtimes$$

Tangentialraum



Definition 5.5

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine C^k-Untermfk ($k \geq 1$), $p \in M$.

$$T_pM := \{ v \in \mathbb{R}^N \mid \exists \text{ Kurve } c: I \to M \subset \mathbb{R}^N \text{ so dass } 0 \in I,\ c(0) = p,\ \dot{c}(0) = v \}$$

Satz 5.6 a) T_pM ist ein n-dim. Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$

b) falls $\varphi^{-1}: \varphi(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \ni p$ eine lokale Karte, dann gilt $T_pM = \text{Bild } D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)}$

$$= \Big\langle \underbrace{\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}\Big|_{\varphi(p)}, \dots, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_n}\Big|_{\varphi(p)}}_{\text{Basis von } T_pM} \Big\rangle.$$

c) falls M sich lokal als Niveaumenge von F schreiben lässt, (siehe Satz 5.2 c)), dann $T_pM = \ker DF\big|_p$.

<u>Beweis:</u> b) Gegeben sei Kurve $c: I \to M \subset \mathbb{R}^N$

mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v \in T_pM$.

Setze: $\tilde{c} := \varphi \circ c : I \to \varphi(\mathcal{U})$; $c = \varphi^{-1} \circ \tilde{c}$

Kettenregel: $\dot{c}(0) = D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)} [\dot{\tilde{c}}(0)]$

$$\Rightarrow T_pM \subseteq \text{Bild}\, D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)}$$

Für die Inklusion $\supseteq$: für jedes $V \in \mathbb{R}^N$ existiert eine Kurve $\tilde{c}: I \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{c}(0) = \varphi(p)$; $\dot{\tilde{c}}(0) = V$.

Setze $c := \varphi^{-1} \circ \tilde{c}$. $\dot{c}(0) = D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)} \underbrace{[\dot{\tilde{c}}(0)]}_{=X}$

$$\Rightarrow \text{Bild}\, D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)} \subseteq T_pM.$$

Nun wissen wir $T_pM = \text{Bild}\left(D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N\right)$

Es reicht für die Angabe einer Basis nun Basis von $\mathbb{R}^n$ einzusetzen: $T_pM = \text{Bild}\left(D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N\right)$

$$= \left\langle D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)}[e_1], \dots, D\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)}[e_n] \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_1}\Big|_{\varphi(p)}, \dots, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_n}\Big|_{\varphi(p)} \right\rangle.$$

a) folgt aus b)

c) Sei c wie oben.

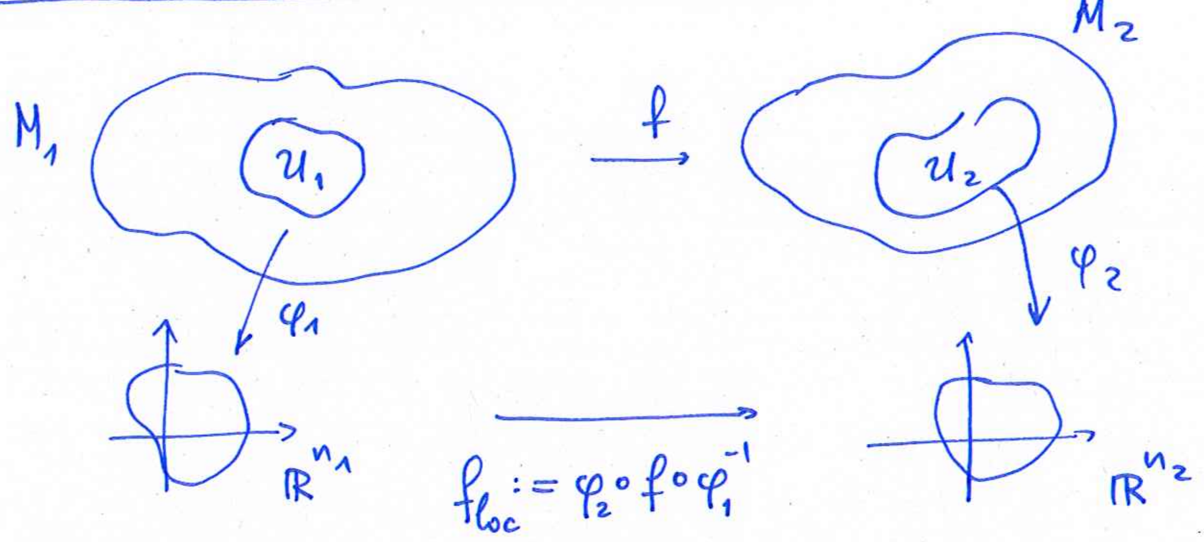
$$F(c(t)) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(c(t)) = DF\big|_p \underbrace{[\dot{c}(0)]}_{\in T_pM}$$

$$\Rightarrow T_pM \subseteq \ker DF\big|_p.$$

Nun gilt nach Satz 5.2 a) $\text{Rang}\, DF\big|_p = N-n$

$\Rightarrow \dim \ker DF\big|_p = n$. Da $\dim T_pM = \dim \ker DF\big|_p = n$ sind beiden Unterräume gleich $\boxtimes$

Differenzierbare Abb. zwischen Untermfk



Definition 5.5 Seien M_1, M_2 C^k-Untermfk.
Dann ist $f: M_1 \longrightarrow M_2$ $C^{\tilde{k}}$ $(\tilde{k} \leq k)$ falls alle lokalen Darstellungen f_{loc} ebenfalls $C^{\tilde{k}}$ sind.

In diesem Fall definiert man für $\tilde{k} \geq 1$:
Das totale Differential von f:

Satz 5.6 $Df|_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2$
ist definiert wie folgt: Sei $c: I \to M_1$ mit $\dot{c}(0) \in T_pM_1$.
Dann:

$$Df|_p\,[\dot{c}(0)] := \frac{d}{dt}\Big|_0 (f \circ c)$$

Beweis: Es ist zu zeigen, dass $Df|_p$ wohl-def. ist, also unabh. von der speziellen Wahl der Kurve.

Ü Es genügt z.zg: das totale Differential von $f_{loc} = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ ist unabh. von Kurvenwahl

$\tilde{c} := \varphi_1 \circ c$; $Df_{loc}[\dot{\tilde{c}}(0)] = \frac{d}{dt}(f_{loc} \circ \tilde{c})$

Letzteres ist nach Kettenregel nur von $\dot{\tilde{c}}(0)$, $\tilde{c}(0)$ abh. $\boxtimes$