Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 11

Aufgabe 45 (4 Punkte)**.** Wir definieren auf $M_n(\mathbb{R})$ ein Skalarprodukt durch $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(AB^T)$, wobei tr die Spurabbildung und $(\ \cdot\ )^T$ die Transposition bezeichne. Wir betrachten die Untermannigfaltigkeit $\mathrm{SO}(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ der speziellen orthogonalen Matrizen, versehen mit der induzierten Metrik. Zeigen Sie, dass an der Identität $\mathrm{id} \in \mathrm{SO}(n)$ die Geodätischen in Richtung $A \in T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{SO}(n)$ gegeben sind durch $\exp(tA)$.

Zeigen Sie ferner, dass von einem beliebigen Punkt $P \in \mathrm{SO}(n)$ ausgehende Geodätische die Gestalt $P\exp(tA)$ mit A schiefsymmetrisch haben.

Aufgabe 46 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gegeben sei ein differenzierbarer Fluss $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ mit Flussvektorfeld $X(p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\,\phi_t(p)$. Zeigen Sie:

a) Es gilt für alle $p \in M$, $v \in T_pM$

$$\langle \nabla_v X, v\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle (d\phi_t)(v), (d\phi_t)v\rangle.$$

Hinweis. Man setze $v = \dot{c}(0)$ für $c : I \to M$ und berechne $\frac{\partial}{\partial t}\|\frac{\partial}{\partial_s}\phi_t(c(s))\|^2$.

b) Die Diffeomorphismen ϕ_t sind genau dann Isometrien, wenn für jedes $p \in M$ der Endomorphismus $v \to \nabla_v X$ von T_pM schiefsymmetrisch ist bezüglich g_p.

In diesem Fall nennt man X *Killing-Vektorfeld* oder *infinitisimale Isometrie.*

c) Für ein Killing-Vektorfeld X und eine Geodätische c ist die Funktion $w(t) = \langle X(t), \dot{c}(t)\rangle$ konstant.

d) Sei $c : [0, L] \to M$ eine geodätische Schleife, d.h. es gelte $c(0) = c(L) = p \in M$. Existieren Killingfelder $X_1, \dots, X_n$ so dass $X_1(p), \dots, X_n(p)$ eine Basis von T_pM ist, so ist c eine geschlossene Geodätische.

Aufgabe 47 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die Halbebene $\mathbb{H} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\big\}$. Zeigen Sie: Wenn wir $\mathbb{H}$ mit der euklidischen Standardmetrik $\langle \cdot\ ,\ \cdot\rangle_0$ versehen, so ist $\mathbb{H}$ nicht geodätisch vollständig. Versehen wir nun also $\mathbb{H}$ mit der hyperbolischen Metrik $g_{(x,y)}(v, w) = \frac{1}{y^2}\langle v, w\rangle_0$ ist $\mathbb{H}$. Zeigen Sie:

a) Ist $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(2)$, so ist die Abbildung $h_A : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, wobei wir die übliche Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ vornehmen.

b) Die Diffeomorphismen $h_A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sind Isometrien bezüglich g.

c) Die Kurve $(0, e^t) : (0, \infty) \to \mathbb{H}$ ist eine Geodätische.

Folgern Sie, dass $\mathbb{H}$ geodätisch vollständig ist.

Aufgabe 48 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine geodätisch vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und X ein Killing-Vektorfeld und $N = \{p \in M \mid X(p) = 0\}$. Wir nennen eine Umgebung U von p *normal*, falls $U = \exp_p V$ für eine offene Umgebung $0 \in V \subset T_pM$, so dass $\exp_p|_V$ ein Diffeomorphismus auf das Bild ist. Zeigen Sie:

a) Sei $p \in N$. Ist $U \subset M$ eine normale Umgebung von p und $q \in U \cap N$, so ist die Kürzeste γ, die p mit q verbindet, in N enthalten.

b) Ist $p \in N$, so existiert eine normale Umgebung $U \subset M$ von p so, dass $U \cap N$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, der 20. Januar 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.