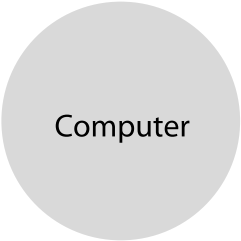
Wie viel Wahrheit steckt in Computersimulationen?

Prof. Dr. Alexey Chernov

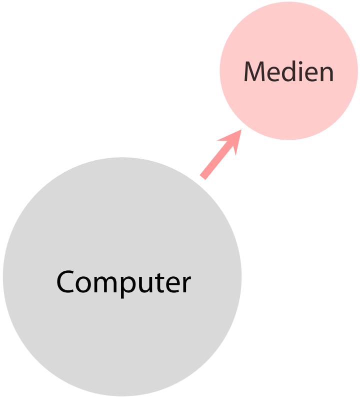
Institut für Mathematik

Tag der Mathematik
5. September 2019

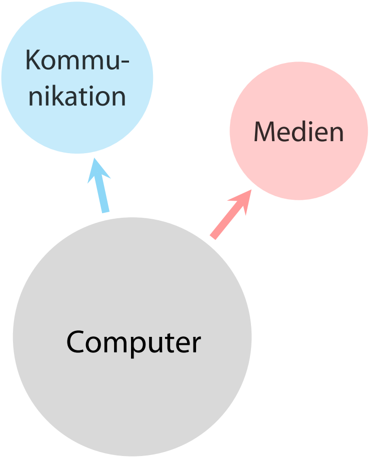
Computer: automatisierte Datenverarbeitung heute



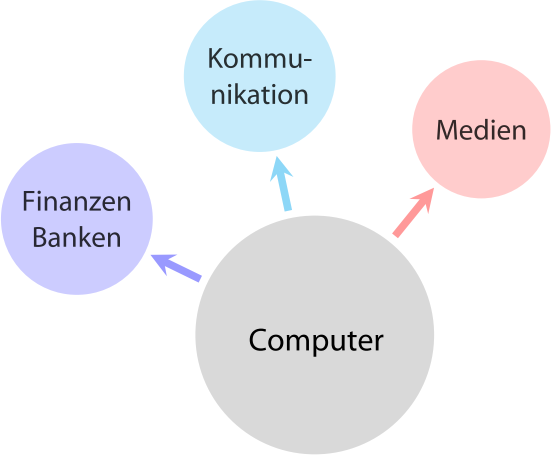
Computer: automatisierte Datenverarbeitung heute



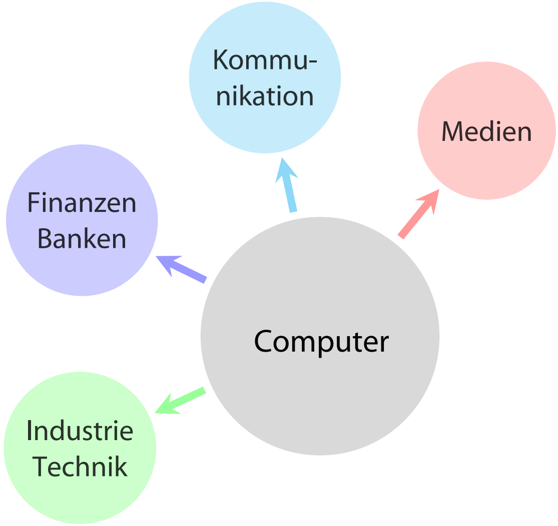
Computer: automatisierte Datenverarbeitung heute



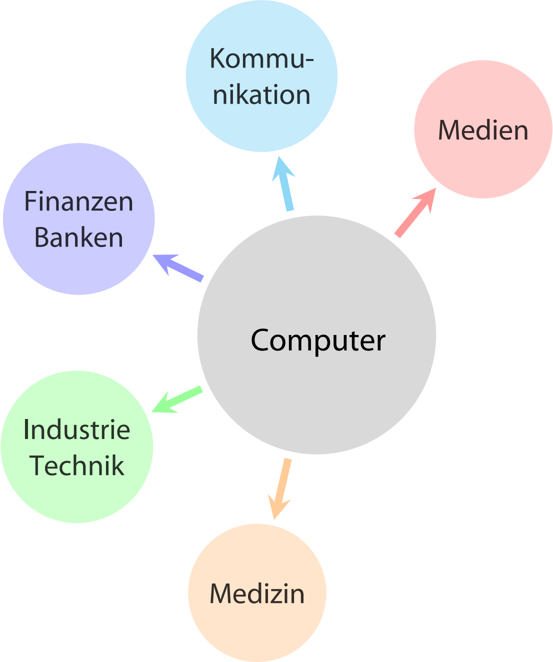
Computer: automatisierte Datenverarbeitung heute



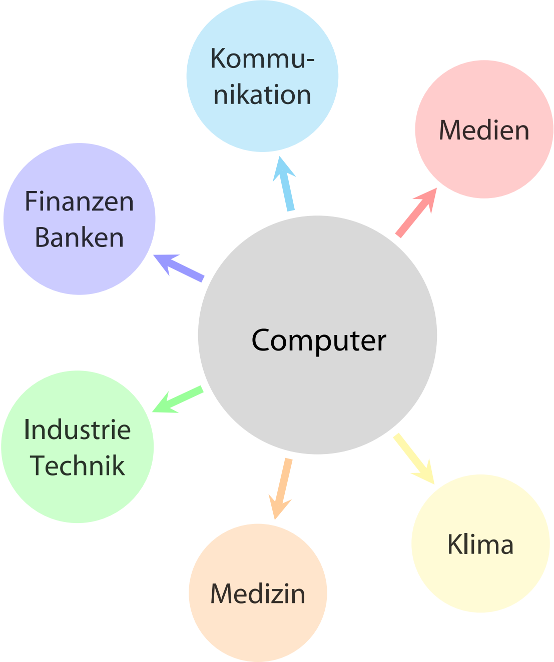
Computer: automatisierte Datenverarbeitung heute



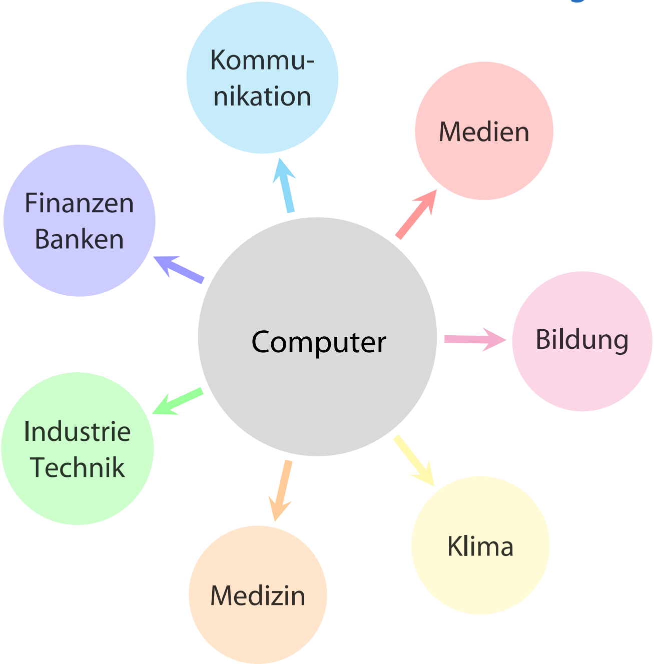
Computer: automatisierte Datenverarbeitung heute



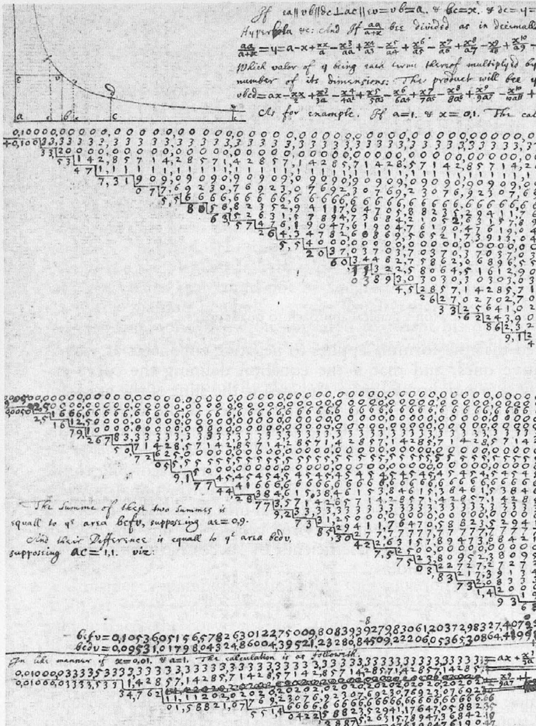
Computer: automatisierte Datenverarbeitung heute



Computer: automatisierte Datenverarbeitung heute



... und vor 350 Jahren:



Isaac Newton

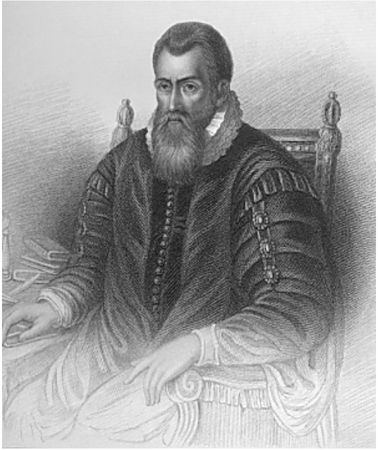
Berechnung der Fläche unter einer Hyperbel (1665)

Cambridge University Library

Bild: Thomas Sonar, Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016

Beschleunigung von Berechnungen hat die Wissenschaft und Technik immer revolutioniert

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$
$$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$$



John Napier, *Erfinder der Logarithmen als Rechenhilfsmittel (1614)*

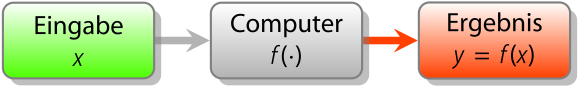
Bild: `https://de.wikipedia.org/wiki/John_Napier`

Dadurch, dass die für Rechnungen benötigte Zeit von einigen Monaten auf einige Tage reduziert wurde, hat die Erfindung der Logarithmen die Lebenszeit eines Astronomen verdoppelt.

(Pierre-Simon de Laplace)

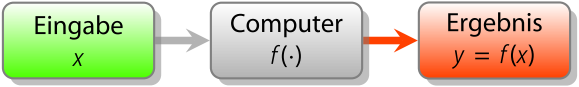
Erfindung eines Computers ist eine Revolution!

- Ein Computer ist ein Gerät, das mittels programmierbarer Rechenvorschriften Daten automatisch verarbeitet.
- Moderne Computer sind auch schnell und werden immer schneller!



Erfindung eines Computers ist eine Revolution!

- Ein Computer ist ein Gerät, das mittels programmierbarer Rechenvorschriften Daten automatisch verarbeitet.
- Moderne Computer sind auch schnell und werden immer schneller!

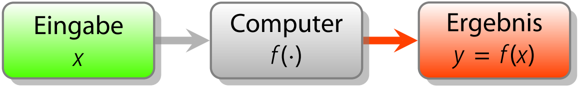


Aber:

- Ist das Ergebnis y das Wahre y?

Erfindung eines Computers ist eine Revolution!

- Ein Computer ist ein Gerät, das mittels programmierbarer Rechenvorschriften Daten automatisch verarbeitet.
- Moderne Computer sind auch schnell und werden immer schneller!



Aber:

- Ist das Ergebnis y das Wahre y?

Lassen wir uns ein Paar Experimente machen...

Folgende Kurzprogramme sind in

- MATLAB, `https://de.mathworks.com/`, oder
- Octave, `https://www.gnu.org/software/octave/`

direkt ausführbar.

Für andere Programmiersprachen sind ggf. kleine Anpassungen vom Syntax notwendig.

Eingabefenster (Test1.m)	*Ausgabefenster*

`x = sqrt(2);`
`y = 10^16;`
 	
`z = (x+y) - y`
	`>> Test1`
	`z =`
	`      2`
	`>>`

Unerwartetes Ergebniss: $z=2$ (nicht $z=\sqrt{2}$!). Warum kommt es heraus?

(Scheinbar) unendliche Schleifen

Eingabefenster (Test2a.m)

```
a = 1/2;
k = 1;
while(a>0)
    a = a/2;
    k = k + 1;
end

fprintf('a=%e, k=%d\n',a,k);
```

Ausgabefenster

```
>> Test2a
a=0.000000e+00, k=1075
>>
```

(Der Befehl `fprintf` *ist formatiert die Ausgabe rechts, damit sie kompakt aussieht.)*

Durch ein wiederholtes Halbieren wird `a` immer kleiner und kommt beliebig nah an die Null. Aber `a` soll doch immer positiv bleiben!

Warum bricht die Schleife doch nach endlich vielen (`k=1075`) Schritten ab?

(Scheinbar) unendliche Schleifen

Wir ersetzen nun die Abbruchsbedingung `a>0` durch `1+a>1`.

Welches Ergebnis wird nun erwartet?

Eingabefenster (Test2b.m)

```
a = 1/2;
k = 1;
while(1+a>1)
    a = a/2;
    k = k + 1;
end

fprintf('a=%e, k=%d\n',a,k);
```

Ausgabefenster

```
>> Test2b
a=1.110223e-16, k=53
>>
```

Nun brich die Schleife viel früher (nach `k`=53 Schritten) ab.

Außerdem wird `a` nicht Null: `a=1.110223e-16`. Warum??

Hier ist die Antwort:

- Die Mantisse von `a` besteht aus allen Ziffern von `a`

  (So ist die Mantisse `M(a)` von `a=12.345` gleich `M(a)=12345`, bzw. entsprechend rechts mit Nullen ergänzt)

- Computer verwenden das Binärsystem (mögliche Ziffern sind 0 oder 1)
- In MATLAB/Octave werden Mantissen aus 53 Nullen oder Einsen verwendet (“Doppelte Genauigkeit” nach Format IEEE754)

Für das Beispiel oben:

```
a = 5.000000e-01, M(1+a) = 11000000000000000000000000000000000000000000000000000, k=1
a = 2.500000e-01, M(1+a) = 10100000000000000000000000000000000000000000000000000, k=2
a = 1.250000e-01, M(1+a) = 10010000000000000000000000000000000000000000000000000, k=3
a = 6.250000e-02, M(1+a) = 10001000000000000000000000000000000000000000000000000, k=4
a = 3.125000e-02, M(1+a) = 10000100000000000000000000000000000000000000000000000, k=5
...
a = 3.552714e-15, M(1+a) = 10000000000000000000000000000000000000000000000010000, k=48
a = 1.776357e-15, M(1+a) = 10000000000000000000000000000000000000000000000001000, k=49
a = 8.881784e-16, M(1+a) = 10000000000000000000000000000000000000000000000000100, k=50
a = 4.440892e-16, M(1+a) = 10000000000000000000000000000000000000000000000000010, k=51
a = 2.220446e-16, M(1+a) = 10000000000000000000000000000000000000000000000000001, k=52
```

Nach 53 Schritten “fällt” die rechte Eins aus der Mantisse `M(1+a)`, so dass `1+a` als `1` dargestellt wird. Dann bricht die Schleife ab.

Maschinengenauigkeit ist die kleinste Zahl $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$1 + \varepsilon > 1$$

Maschinengenauigkeit ist die kleinste Zahl $\varepsilon > 0$, so dass gilt

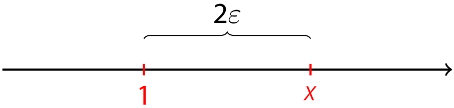
$$\mathtt{rd}(1 + \varepsilon) > 1$$

Maschinengenauigkeit ist die kleinste Zahl $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathtt{rd}(1+\varepsilon) > 1$$

Achtung!

- Maschinenzahlen sind isoliert: *Sei x die nächste zu 1 Maschinenzahl, dann*

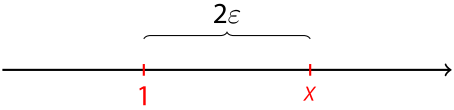


Maschinengenauigkeit ist die kleinste Zahl $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathtt{rd}(1 + \varepsilon) > 1$$

Achtung!

- Maschinenzahlen sind isoliert: *Sei x die nächste zu 1 Maschinenzahl, dann*



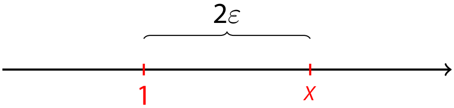
- Maschinenzahlen sind ungleichmäßig verteilt

Maschinengenauigkeit ist die kleinste Zahl $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathtt{rd}(1 + \varepsilon) > 1$$

Achtung!

- Maschinenzahlen sind isoliert: *Sei x die nächste zu 1 Maschinenzahl, dann*



- Maschinenzahlen sind ungleichmäßig verteilt

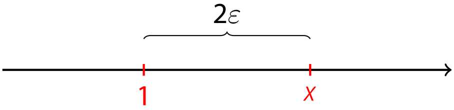
- Aber $\varepsilon \approx 2{,}22 \cdot 10^{-16}$ ist doch ausreichend klein

Maschinengenauigkeit ist die kleinste Zahl $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathtt{rd}(1 + \varepsilon) > 1$$

Achtung!

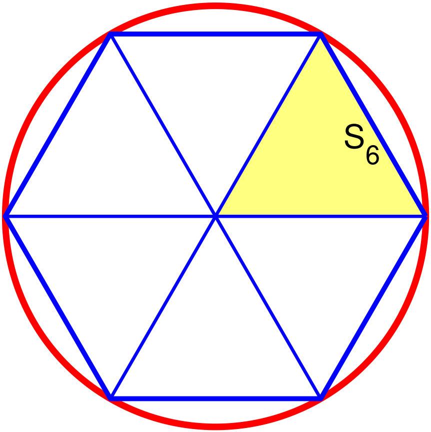
- Maschinenzahlen sind isoliert: *Sei x die nächste zu 1 Maschinenzahl, dann*



- Maschinenzahlen sind ungleichmäßig verteilt

- Aber $\varepsilon \approx 2{,}22 \cdot 10^{-16}$ ist doch ausreichend klein, oder?

Berechnung von π nach Archimedes



- Gegeben ein reguläres n-Eck in einem Einheitskreis
- S_n = Seitenlänge
- Dann gilt für sein Umfang

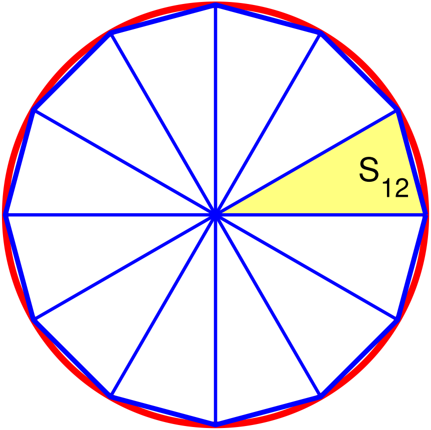
$$U_n = n \cdot S_n \to 2\pi, \quad n \to \infty$$

und folglich

$$\pi \approx \frac{n}{2} \cdot S_n$$

für ein "großes" n.

Berechnung von π nach Archimedes



- Gegeben ein reguläres n-Eck in einem Einheitskreis
- S_n = Seitenlänge
- Dann gilt für sein Umfang

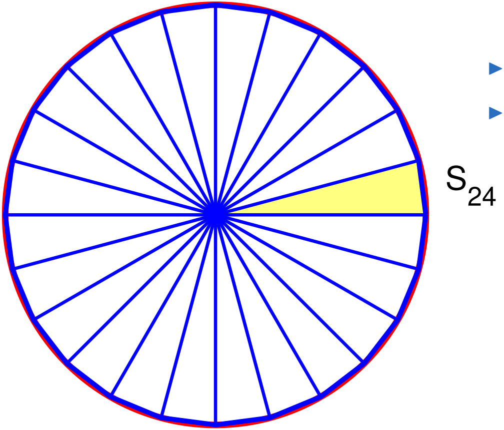
$$U_n = n \cdot S_n \to 2\pi, \quad n \to \infty$$

und folglich

$$\pi \approx \frac{n}{2} \cdot S_n$$

für ein “großes” n.

Berechnung von π nach Archimedes



- Gegeben ein reguläres n-Eck in einem Einheitskreis
- S_n = Seitenlänge
- Dann gilt für sein Umfang

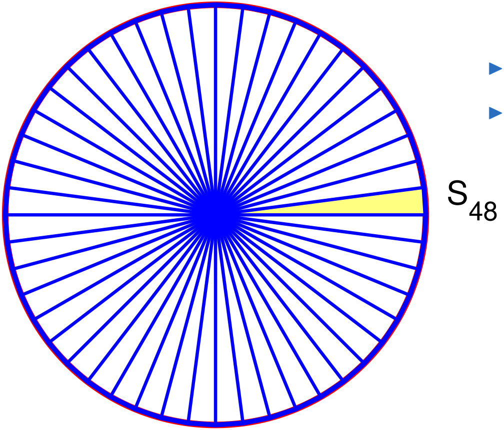
$$U_n = n \cdot S_n \to 2\pi, \quad n \to \infty$$

und folglich

$$\pi \approx \frac{n}{2} \cdot S_n$$

für ein “großes” n.

Berechnung von π nach Archimedes



- Gegeben ein reguläres n-Eck in einem Einheitskreis
- S_n = Seitenlänge
- Dann gilt für sein Umfang

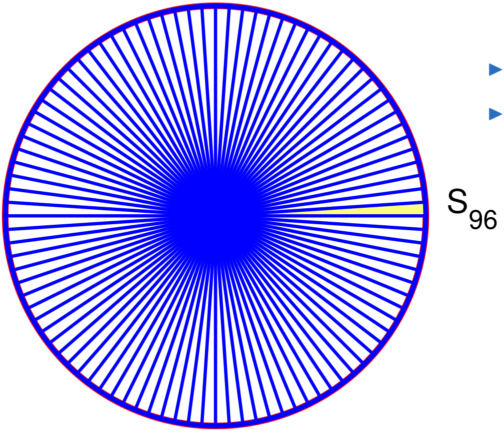
$$U_n = n \cdot S_n \to 2\pi, \quad n \to \infty$$

und folglich

$$\pi \approx \frac{n}{2} \cdot S_n$$

für ein "großes" n.

Berechnung von π nach Archimedes



- Gegeben ein reguläres n-Eck in einem Einheitskreis
- S_n = Seitenlänge
- Dann gilt für sein Umfang

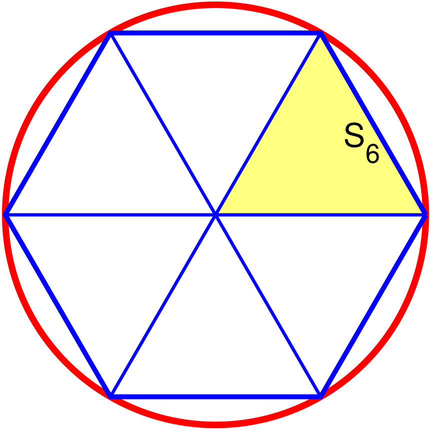
$$U_n = n \cdot S_n \to 2\pi, \quad n \to \infty$$

und folglich

$$\pi \approx \frac{n}{2} \cdot S_n$$

für ein "großes" n.

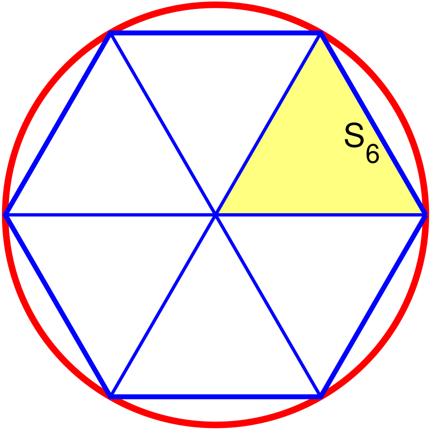
Berechnung von π nach Archimedes



- Nach Satz von Pythagoras:

$$S_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}$$

Berechnung von π nach Archimedes



- Nach Satz von Pythagoras:

$$S_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}$$

- Startwert: $S_6 = 1$

Auslöschung signifikanter Ziffern (Subtraktionskatastrophe)

```
meinPi = 3.000000,   Schritt = 1
meinPi = 3.105829,   Schritt = 2
meinPi = 3.132629,   Schritt = 3
meinPi = 3.139350,   Schritt = 4
meinPi = 3.141032,   Schritt = 5
meinPi = 3.141452,   Schritt = 6
meinPi = 3.141558,   Schritt = 7
meinPi = 3.141584,   Schritt = 8
meinPi = 3.141590,   Schritt = 9
meinPi = 3.141592,   Schritt = 10
meinPi = 3.141593,   Schritt = 11
meinPi = 3.141593,   Schritt = 12
meinPi = 3.141593,   Schritt = 13
meinPi = 3.141593,   Schritt = 14
meinPi = 3.141593,   Schritt = 15
meinPi = 3.141593,   Schritt = 16
meinPi = 3.141592,   Schritt = 17
meinPi = 3.141592,   Schritt = 18
meinPi = 3.141587,   Schritt = 19
meinPi = 3.141587,   Schritt = 20
meinPi = 3.141674,   Schritt = 21
meinPi = 3.141674,   Schritt = 22
meinPi = 3.143073,   Schritt = 23
meinPi = 3.137475,   Schritt = 24
meinPi = 3.181981,   Schritt = 25
meinPi = 3.354102,   Schritt = 26
meinPi = 3.000000,   Schritt = 27
```

Auslöschung signifikanter Ziffern (Subtraktionskatastrophe)

- Grund: Subtraktion fast gleich große Zahlen

$$S_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}$$

```
meinPi = 3.000000,   Schritt = 1
meinPi = 3.105829,   Schritt = 2
meinPi = 3.132629,   Schritt = 3
meinPi = 3.139350,   Schritt = 4
meinPi = 3.141032,   Schritt = 5
meinPi = 3.141452,   Schritt = 6
meinPi = 3.141558,   Schritt = 7
meinPi = 3.141584,   Schritt = 8
meinPi = 3.141590,   Schritt = 9
meinPi = 3.141592,   Schritt = 10
meinPi = 3.141593,   Schritt = 11
meinPi = 3.141593,   Schritt = 12
meinPi = 3.141593,   Schritt = 13
meinPi = 3.141593,   Schritt = 14
meinPi = 3.141593,   Schritt = 15
meinPi = 3.141593,   Schritt = 16
meinPi = 3.141592,   Schritt = 17
meinPi = 3.141592,   Schritt = 18
meinPi = 3.141587,   Schritt = 19
meinPi = 3.141587,   Schritt = 20
meinPi = 3.141674,   Schritt = 21
meinPi = 3.141674,   Schritt = 22
meinPi = 3.143073,   Schritt = 23
meinPi = 3.137475,   Schritt = 24
meinPi = 3.181981,   Schritt = 25
meinPi = 3.354102,   Schritt = 26
meinPi = 3.000000,   Schritt = 27
```

Auslöschung signifikanter Ziffern (Subtraktionskatastrophe)

- Grund: Subtraktion fast gleich große Zahlen

$$S_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}$$

- Bessere Auswertung von S_{2n}^2

$$S_{2n}^2 = \frac{2^2 - \left(\sqrt{4 - S_n^2}\right)^2}{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$$

$$= \frac{S_n^2}{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$$

```
meinPi = 3.000000,   Schritt = 1
meinPi = 3.105829,   Schritt = 2
meinPi = 3.132629,   Schritt = 3
meinPi = 3.139350,   Schritt = 4
meinPi = 3.141032,   Schritt = 5
meinPi = 3.141452,   Schritt = 6
meinPi = 3.141558,   Schritt = 7
meinPi = 3.141584,   Schritt = 8
meinPi = 3.141590,   Schritt = 9
meinPi = 3.141592,   Schritt = 10
meinPi = 3.141593,   Schritt = 11
meinPi = 3.141593,   Schritt = 12
meinPi = 3.141593,   Schritt = 13
meinPi = 3.141593,   Schritt = 14
meinPi = 3.141593,   Schritt = 15
meinPi = 3.141593,   Schritt = 16
meinPi = 3.141592,   Schritt = 17
meinPi = 3.141592,   Schritt = 18
meinPi = 3.141587,   Schritt = 19
meinPi = 3.141587,   Schritt = 20
meinPi = 3.141674,   Schritt = 21
meinPi = 3.141674,   Schritt = 22
meinPi = 3.143073,   Schritt = 23
meinPi = 3.137475,   Schritt = 24
meinPi = 3.181981,   Schritt = 25
meinPi = 3.354102,   Schritt = 26
meinPi = 3.000000,   Schritt = 27
```

Auslöschung signifikanter Ziffern (Subtraktionskatastrophe)

- Grund: Subtraktion fast gleich große Zahlen

$$S_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}$$

- Bessere Auswertung von S_{2n}^2

$$S_{2n}^2 = \frac{2^2 - \left(\sqrt{4 - S_n^2}\right)^2}{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$$

$$= \frac{S_n^2}{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$$

```
meinPi = 3.000000,   Schritt = 1
meinPi = 3.105829,   Schritt = 2
meinPi = 3.132629,   Schritt = 3
meinPi = 3.139350,   Schritt = 4
meinPi = 3.141032,   Schritt = 5
meinPi = 3.141452,   Schritt = 6
meinPi = 3.141558,   Schritt = 7
meinPi = 3.141584,   Schritt = 8
meinPi = 3.141590,   Schritt = 9
meinPi = 3.141592,   Schritt = 10
meinPi = 3.141593,   Schritt = 11
meinPi = 3.141593,   Schritt = 12
meinPi = 3.141593,   Schritt = 13
meinPi = 3.141593,   Schritt = 14
meinPi = 3.141593,   Schritt = 15
meinPi = 3.141593,   Schritt = 16
meinPi = 3.141592,   Schritt = 17
meinPi = 3.141592,   Schritt = 18
meinPi = 3.141587,   Schritt = 19
meinPi = 3.141587,   Schritt = 20
meinPi = 3.141674,   Schritt = 21
meinPi = 3.141674,   Schritt = 22
meinPi = 3.143073,   Schritt = 23
meinPi = 3.137475,   Schritt = 24
meinPi = 3.181981,   Schritt = 25
meinPi = 3.354102,   Schritt = 26
meinPi = 3.000000,   Schritt = 27
```

Auslöschung signifikanter Ziffern (Subtraktionskatastrophe)

- Grund: Subtraktion fast gleich große Zahlen

$$S_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}$$

- Bessere Auswertung von S_{2n}^2

$$S_{2n}^2 = \frac{2^2 - \left(\sqrt{4 - S_n^2}\right)^2}{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$$

$$= \frac{S_n^2}{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$$

```
meinPi = 3.000000,   Schritt = 1
meinPi = 3.105829,   Schritt = 2
meinPi = 3.132629,   Schritt = 3
meinPi = 3.139350,   Schritt = 4
meinPi = 3.141032,   Schritt = 5
meinPi = 3.141452,   Schritt = 6
meinPi = 3.141558,   Schritt = 7
meinPi = 3.141584,   Schritt = 8
meinPi = 3.141590,   Schritt = 9
meinPi = 3.141592,   Schritt = 10
meinPi = 3.141593,   Schritt = 11
meinPi = 3.141593,   Schritt = 12
meinPi = 3.141593,   Schritt = 13
meinPi = 3.141593,   Schritt = 14
meinPi = 3.141593,   Schritt = 15
meinPi = 3.141593,   Schritt = 16
meinPi = 3.141593,   Schritt = 17
meinPi = 3.141593,   Schritt = 18
meinPi = 3.141593,   Schritt = 19
meinPi = 3.141593,   Schritt = 20
meinPi = 3.141593,   Schritt = 21
meinPi = 3.141593,   Schritt = 22
meinPi = 3.141593,   Schritt = 23
meinPi = 3.141593,   Schritt = 24
meinPi = 3.141593,   Schritt = 25
meinPi = 3.141593,   Schritt = 26
meinPi = 3.141593,   Schritt = 27
```

Auslöschung signifikanter Ziffern (Subtraktionskatastrophe)

- Grund: Subtraktion fast gleich große Zahlen

$$S_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}$$

- Bessere Auswertung von S_{2n}^2

$$S_{2n}^2 = \frac{2^2 - \left(\sqrt{4 - S_n^2}\right)^2}{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$$

$$= \frac{S_n^2}{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$$

- `meinPi = 3.141592653589793`

  (alle 16 signifikante Ziffern sind korrekt!)

Der Befehl `format long` zeigt alle 16 Ziffern an.

```
meinPi = 3.000000,   Schritt = 1
meinPi = 3.105829,   Schritt = 2
meinPi = 3.132629,   Schritt = 3
meinPi = 3.139350,   Schritt = 4
meinPi = 3.141032,   Schritt = 5
meinPi = 3.141452,   Schritt = 6
meinPi = 3.141558,   Schritt = 7
meinPi = 3.141584,   Schritt = 8
meinPi = 3.141590,   Schritt = 9
meinPi = 3.141592,   Schritt = 10
meinPi = 3.141593,   Schritt = 11
meinPi = 3.141593,   Schritt = 12
meinPi = 3.141593,   Schritt = 13
meinPi = 3.141593,   Schritt = 14
meinPi = 3.141593,   Schritt = 15
meinPi = 3.141593,   Schritt = 16
meinPi = 3.141593,   Schritt = 17
meinPi = 3.141593,   Schritt = 18
meinPi = 3.141593,   Schritt = 19
meinPi = 3.141593,   Schritt = 20
meinPi = 3.141593,   Schritt = 21
meinPi = 3.141593,   Schritt = 22
meinPi = 3.141593,   Schritt = 23
meinPi = 3.141593,   Schritt = 24
meinPi = 3.141593,   Schritt = 25
meinPi = 3.141593,   Schritt = 26
meinPi = 3.141593,   Schritt = 27
```

Auslöschung in der *pq*-Formel

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{mit} \quad |p| \gg |q|.$$

Lösungsformel: $$x_{1,2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Auslöschung in der *pq*-Formel

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{mit} \quad |p| \gg |q|.$$

Lösungsformel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Für $p > 0$ wäre die auslöschungsfreie Variante:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \qquad x_2 = \frac{q}{x_1}.$$

Auslöschung in der *pq*-Formel

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{mit} \quad |p| \gg |q|.$$

Lösungsformel: $\qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Für $p > 0$ wäre die auslöschungsfreie Variante:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \qquad x_2 = \frac{q}{x_1}.$$

Können Sie auch die auslöschungsfreie Variante für $p < 0$ entwerfen?

Auslöschung und Fehlerverstärkung

- Auslösung signifikanter Ziffern ist ein Effekt der Maschinenarithmetik
- Es gibt allerdings unerwünschte Effekte, die sogar in exakter Arithmetik sichtbar werden: Fehlerverstärkung

Zwei lineare Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2 \cdot y & = & 2 \\ 2 \cdot x & + & 2 \cdot y & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2 \cdot y & = & 2 \\ 2 \cdot x & + & 3,999 \cdot y & = & 4 \end{array}\right.$$

Zwei lineare Gleichungssysteme

$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = 2 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2 \cdot y = 2 \\ 2 \cdot x + 3,999 \cdot y = 4 \end{cases}$$

Lösungen:

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Zwei lineare Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2\cdot y & = & 2 \\ 2\cdot x & + & 2\cdot y & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2\cdot y & = & 2 \\ 2\cdot x & + & 3,999\cdot y & = & 4 \end{array}\right.$$

Lösungen: $\left\{\begin{array}{l} x_0 = 2, \\ y_0 = 0, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x_0 = 2, \\ y_0 = 0. \end{array}\right.$

Zwei gestörte lineare Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_\delta & + & 2\cdot y_\delta & = & 2+\delta \\ 2\cdot x_\delta & + & 2\cdot y_\delta & = & 4-\delta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x_\delta & + & 2\cdot y_\delta & = & 2+\delta \\ 2\cdot x_\delta & + & 3,999\cdot y_\delta & = & 4-\delta \end{array}\right.$$

Zwei lineare Gleichungssysteme

$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = 2 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2 \cdot y = 2 \\ 2 \cdot x + 3,999 \cdot y = 4 \end{cases}$$

Lösungen: $\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 0, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 0. \end{cases}$

Zwei gestörte lineare Gleichungssysteme

$$\begin{cases} x_\delta + 2 \cdot y_\delta = 2 + \delta \\ 2 \cdot x_\delta + 2 \cdot y_\delta = 4 - \delta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_\delta + 2 \cdot y_\delta = 2 + \delta \\ 2 \cdot x_\delta + 3,999 \cdot y_\delta = 4 - \delta \end{cases}$$

Frage: Sind ihre Lösungen (x_δ, y_δ) nah an (x_0, y_0)?

Zwei lineare Gleichungssysteme

$$\begin{cases} \quad x + 2\cdot y = 2 \\ 2\cdot x + 2\cdot y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \quad x + 2\cdot y = 2 \\ 2\cdot x + 3,999\cdot y = 4 \end{cases}$$

Lösungen: $\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 0. \end{cases}$

Zwei gestörte lineare Gleichungssysteme

$$\begin{cases} \quad x_\delta + 2\cdot y_\delta = 2 + \delta \\ 2\cdot x_\delta + 2\cdot y_\delta = 4 - \delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \quad x_\delta + 2\cdot y_\delta = 2 + \delta \\ 2\cdot x_\delta + 3,999\cdot y_\delta = 4 - \delta \end{cases}$$

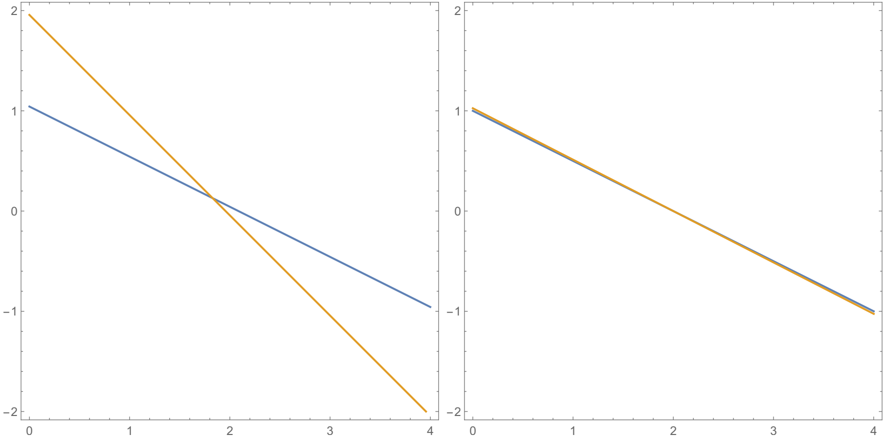
Frage: Sind ihre Lösungen (x_δ, y_δ) nah an (x_0, y_0)?

Es gilt für $\delta = 0{,}001$: $\begin{cases} x_\delta = 1{,}998, \\ y_\delta = 0{,}0015, \end{cases}$ $\begin{cases} x_\delta = -3{,}999, \\ y_\delta = 3. \end{cases}$

Warum ist es so?

Geometrische Interpretierung

$$\begin{cases} x_\delta + 2 \cdot y_\delta = 2 + \delta \\ 2 \cdot x_\delta + 2 \cdot y_\delta = 4 - \delta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_\delta + 2 \cdot y_\delta = 2 + \delta \\ 2 \cdot x_\delta + 3,999 \cdot y_\delta = 4 - \delta \end{cases}$$



Fehlerverstärkung bei der Subtraktion

Betrachte die Auswertung von

$$f(x) = x - y$$

für ein fehlerbehaftetes $x_\delta = x + \delta$. Wie hoch ist die Fehlerverstärkung K

$$\frac{f(x_\delta) - f(x)}{f(x)} = K \cdot \frac{x_\delta - x}{x} \qquad ?$$

Fehlerverstärkung bei der Subtraktion

Betrachte die Auswertung von

$$f(x) = x - y$$

für ein fehlerbehaftetes $x_\delta = x + \delta$. Wie hoch ist die Fehlerverstärkung K

$$\frac{f(x_\delta) - f(x)}{f(x)} = K \cdot \frac{x_\delta - x}{x} \qquad ?$$

Das Einsetzen ergibt: $K = \dfrac{x}{x-y}$ für $x \neq 0$.

Achtung: K **ist sehr groß für** $x \approx y$**!**

Zusammenfassung

- Computer sind mächtige Helfer, doch den Simulationsergebnissen kann man nicht blind vertrauen.
- Die meisten Computersimulationen sind fehlerbehaftet.
- Numerik: Konstruktion und Fehleranalysis für Algorithmen für Anwendungsprobleme, *z.B. Navier-Stokes Gleichung (Klimaforschung):*

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \nu \triangle \vec{v} + \vec{f}.$$

- Elementare Beispiele aus dem Vortrag sind relevant in Teilen komplexerer Algorithmen.